

$\min (\max |p(x)|) = \left| \frac{c}{2^n} T_n(x) \right| = \frac{|c|}{2^n}$, όπου P_n^c χώρος πολυωνύμων
 η βαθμού $P \in P_n^c$
 και $x \in [-1, 1]$ με σωτηλέως μεγιστοβαθμίου όρου (x^n) το c

Πχ

Εστω $T_n(x) = \cos n\theta$ όπου $x = \cos \theta$. Παρατηρούμε ότι στα
 σημεία $x_j = \cos \frac{\pi j}{n}$, $j = 0, 1, \dots, n$ το $T_n(x)$ γίνεται:

$$T_n(x_j) = \cos n \arccos x_j = \cos n \frac{\pi j}{n} = \cos \pi j = (-1)^j.$$

Επομένως το $T_n(x)$ έχει ένα εναλλασσόμενο σύνολο από
 $n+1$ σημεία

Εστω $P \in P_n^c$ και θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη οριακή
 προσέγγιση του P στον P_n στο $[-1, 1]$, τότε εάν P_n^* είναι
 η βέλτιστη οριακή προσέγγιση για το σφάλμα: $e(x) = P(x) - P_n^*(x)$
 θα έχουμε ένα εναλλασσόμενο σύνολο από $n+2$ σημεία και ο
 συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του e θα είναι το c
 λόγω μοναδικότητας της βέλτιστης οριακής προσέγγισης αυτό
 το πολώνιο θα είναι $e(x) = \frac{c}{2^n} T_{n+1}(x)$ με συντελεστή
 μεγιστοβαθμίου όρου του $T_{n+1}(x)$ το 2^n .

Βέλτιστη ομοιωμερή προσέγγιση του x^{n+1} στον P_n

Αυτή θα είναι $P_n^*(x) = x^{n+1} - \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$

$$x^{n+1} \in P_{n+1}^1: e(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) \Rightarrow x^{n+1} - P_n^*(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{n+1} - \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = P_n^*(x)$$

Παράδειγμα 1:

Ναι βρεθεί η δοπ του $x^3 \in C[-1, 1]$, $x^3 \in P_3^1$ στον P_2

ΛΥΣΗ

$$P_2^*(x) = x^3 - \frac{1}{2^2} T_3(x) = x^3 - \frac{1}{4}(4x^3 - 3x) = \frac{3}{4}x = P_1^*$$

Παράδειγμα 2:

Να βρεθεί η βολή της $x^4 \in C[-1,1]$, στον P_3 με $x^4 \in P_4'$

ΛΥΣΗ

$$P_3^*(x) = x^4 - \frac{1}{8} T_4(x) = x^4 - \frac{1}{8} (8x^4 - 8x^2 + 1) = x^2 - \frac{1}{8}$$

Έστω ότι θέλαμε να βρούμε τη βέλτιστη ομοιογενή προσέγγιση του P_n^c ορισμένου στο $[a,b]$, στον P_n

Θα θεωρήσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, \text{ που μετασχηματίζει το } [a,b] \text{ στο } [-1,1]$$

Τότε:

$$q(t) = p(x(t)) \in P_n^{c'} \text{ ορίζεται στο } [-1,1] \text{ όπου } c' = c \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1}$$

Χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Chebyshev βρίσκουμε την

βέλτιστη ομοιογενή προσέγγιση $q(t) : q_n^*(t)$ στο $[-1,1]$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$t = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a} \text{ και παίρνουμε την βολή του } P \in P_n^c$$

$$P_n^*(x) = q_n^*(t(x)) \text{ ορισμένη στο } [a,b]$$

Άσκηση 8 (Από βιβλίο)

Να βρεθεί η βολή της $f(x) = x^2$ ορισμένη στο $[0,1]$ στον P_1

ΛΥΣΗ

$$\text{Έστω γραμ. μετασχ. } x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t+1)$$

Έτσι η:

$$g(t) = f(x(t)) = \left[\frac{1}{2}(t+1) \right]^2 = \frac{1}{4} (t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

ορισμένη στο $[-1,1]$

Η βολή $q^*(t)$ για τη g είναι:

$$q^*(t) = g(t) - \frac{1}{8} T_2(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(2t^2 - 1) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

Έτσι για $t = 2x - 1$ έχουμε:

$$P_1^*(x) = q_1^*(t(x)) = \frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{8} = x - \frac{1}{8} \text{ η βολή.}$$

Επαλήθευση:

$T_2(x)$ παίρνει μέγιστοι στα σημεία $-1, 0, 1$

$$e(0) = 0^2 - (0 - \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}, \quad e(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$$

$$e(1) = \frac{1}{8} \quad \text{Εναλλακτικό σύνολο}$$

Κριτήριο επιλογής σημείων:

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{n}, \quad j=0,1,\dots,n \quad \text{όπου για}$$

$$n=2, \quad \cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \frac{2\pi}{2} = -1$$

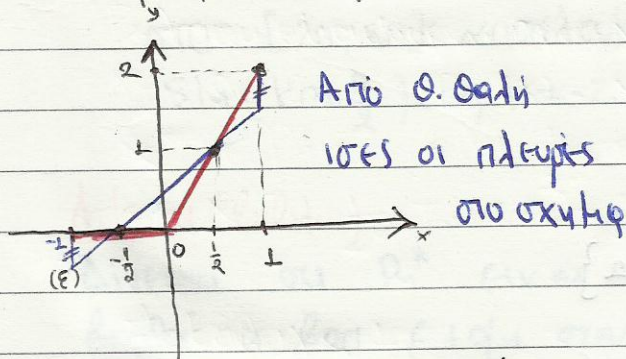
και με τον γραμ. μετασχη. παίρνουμε τα
σημεία $1, 0, -1$ στα
σημεία $0, 1, \frac{1}{2}$.

Άσκηση (βιβλίο)

Να βρεθεί η βστ της $f(x) = x + |x|$ ορισμένης στο $[-1, 1]$ στον P_1
ΝΥΕΗ

$$f(x) = \begin{cases} x - x = 0, & \text{στο } [-1, 0] \\ x + x = 2x, & \text{στο } [0, 1] \end{cases} \quad \text{για τελεωστήρι γραφή}$$

Γραφική παράσταση της f



Η βστ θα 'ναι η ευθεία που
εμίζει τα μέσους των πλευρών
του τριγώνου $(-\frac{1}{2}, 0)$ και $(\frac{1}{2}, 1)$

$$(ε) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_1^*(x) = \frac{1-0}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} (x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow P_1^*(x) = x + \frac{1}{2}$$

Επαλήθευση:

$$e(-1) = 0 - (-1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \quad e(0) = 0 - (0 + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}, \quad e(1) = 2 - (1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Εναλλακτικό σύνολο το $\{-1, 0, 1\}$

Άσκηση (βιβλίο)

Να βρεθεί η βάρ $f(x) = \frac{1}{x}$ ορισμένη στο $[1, 2]$ στον P_1 .

ΛΥΣΗ

Έστω $P_1^*(x) = ax + b$ τότε το $e(x) = \frac{1}{x} - (ax + b)$

$$e'(x) = -\frac{1}{x^2} - a = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{1}{a}}$$

Αναγκαστικά (αφού το Διάστημα είναι το $[1, 2]$)
δεν υπάρχει η $\sqrt{-\frac{1}{a}}$. Επομένως, το εναλλακόμενο
σύνολο θα είναι το $\{1, \sqrt{-\frac{1}{a}}, 2\}$. Τότε:

$$e(1) = -e\left(\sqrt{-\frac{1}{a}}\right) = e(2) \Leftrightarrow 1 - a - b = -\left(\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{a}}} - (a\sqrt{-\frac{1}{a}} + b)\right) = \\ = \frac{1}{2} - 2a - b.$$

Άνω το σύστημα:

$$1 - a - b = \frac{1}{2} - 2a - b \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} \in [1, 2]$$

Έτσι, βρίσκουμε το b :

$$1 - a - b = -\left(\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{a}}} - (a\sqrt{-\frac{1}{a}} + b)\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2} - b = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - b\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2b = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow b = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Έτσι, } P_1^*(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επαλήθευση στα σημεία $\{1, \sqrt{2}, 2\}$

$$e(1) = 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}$$

$$e(2) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άσκηση 10 (βιβλίο)

Να βρεθεί η βοή της x^3 ορισμένης στο $[a, b]$, στον P_3
ΛΥΣΗ

$$\text{Εφ' όσον } x^3 \in P_3 \Rightarrow P_3^*(x) = x^3$$

Άσκηση (βιβλίο)

Ποιο από τα δύο πολώνυμα $x^3 - \frac{1}{8}x$ & $x^2 - \frac{1}{8}$ δεν μπορεί να είναι β.ο.π. του x^4 στο $[-1, 1]$, στον P_3 και γιατί;

ΛΥΣΗ

Δεν μπορεί να είναι το 1^o : $x^3 - \frac{1}{8}x$ διότι είναι ηφίστου βαθμού (μέσω Chebyshev) άρα άρτιο

Συνεπώς, $x^2 - \frac{1}{8}$ είναι βοή του x^4 στο $[-1, 1]$ στον P_3

Άσκηση (βιβλίο)

Νόο η βέλτιστη ομαόμορφη προσέγγιση της $f(x) = \sin x + 3x^2 - 5x + 1$ ορισμένης στο $[-2\pi, 2\pi]$ στον P_2 , είναι $P_2^*(x) = 3x^2 - 5x + 1$

ΛΥΣΗ

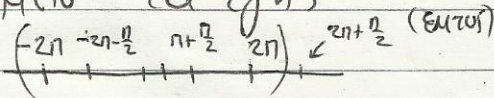
Παίρνω το σφάλμα:

$$e(x) = f(x) - P_2^*(x) = \sin x$$

Το $\sin x$ έχει ένα εναλλασσόμενο σύνολο σημείων

στο $[-2\pi, 2\pi]$ αποτελούμενο από 4 σημεία τα εξής:

$$\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k = -2, -1, 0, 1$$



Άσκηση (βιβλίο)

Δίνεται ότι P_n^* είναι η βοή της $f \in C[a, b]$ στον P_n . Να βρεθεί η βοή $f + q_n$ στον P_n , όπου $q_n \in P_n$

ΛΥΣΗ

Αφού P_n^* β.ο.π. της f στο P_n θα υπάρχει εναλλασσόμενο σύνολο σημείων $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ εν $[a, b]$ δια τη συνάρτηση σφάλμα που είναι $e(x) = f(x) - P_n^*(x) = (f(x) + q_n(x)) - (P_n^*(x) + q_n(x))$
 $\Rightarrow$ Υπάρχει το ίδιο εναλλασσόμενο σύνολο είναι και δια τη συνάρτηση $f(x) + q_n(x)$ με βοή των $P_n^*(x) + q_n(x)$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ ΣΗΜΑΤΩΝ

Έστω f ορισμένη σε σύνολο σημείων $X_m = \{x_1, \dots, x_n\}$

Πρόβλημα: Να βρεθεί m βαθ τ_m f στο P_n , δηλαδή

$$\|f - P_n^*\| = \max_{x \in X_m} |f(x) - P_n^*(x)| \leq \max_{x \in X_m} |f(x) - p(x)| = \|f - p\|, \forall p \in P_n$$

Αν $m \leq n+1$ τότε το $P_n^*(x)$ θα είναι το πολώνυμο παρεμβολής (γνωστό από αριθμ. Ανάλυση) με

$$\|f - P_n^*\| = 0$$

Έστω $m \geq n+2$ τότε το πολώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό